

УДК 621.396.969

doi 10.54708/22259309_2026_23630

Стохастическая модель UWB-радиоканала на основе уравнения Фоккера–Планка

Я. В. Алексакина

aleksakinayv@uust.ru

ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий» (УУНИТ)

Аннотация. Разработан комплекс математических моделей сверхширокополосного (UWB) радиоканала, ориентированный на анализ надёжности функционирования и скрытности передачи сигналов в условиях многолучевого распространения и преднамеренных помех. Импульсная характеристика многолучевого канала представлена в виде линейного фильтра с переменными параметрами; получены частотно-временные представления, позволяющие оценивать селективность канала. Введено статистическое описание амплитуд многолучевых компонент на основе распределений Релея и Райса. Предложена Фоккер–Планковская модель временной эволюции амплитуд, обеспечивающая единое описание как мгновенных статистик, так и динамики замираний. Формализованы количественные показатели скрытности передачи, связывающие энергетические характеристики системы с вероятностью обнаружения сторонним наблюдателем.

Ключевые слова: UWB-радиоканал; многолучевое распространение; уравнение Фоккера–Планка; распределение Релея; распределение Райса; доплеровские эффекты; скрытность передачи.

ВВЕДЕНИЕ

Сверхширокополосные (UWB) системы связи находят всё более широкое применение в задачах высокоточного позиционирования, беспроводного обмена данными на малых и средних дистанциях, а также в приложениях, предъявляющих повышенные требования к скрытности и помехоустойчивости радиоканала [1–3]. Физической основой UWB-технологии является передача сверхкоротких импульсов длительностью порядка 0,1–2 нс, формирующих спектр шириной от сотен мегагерц до нескольких гигагерц, что обеспечивает уникальное сочетание высокого временного разрешения и устойчивости к частотно-избирательным помехам [4, 5].

Стандартизация UWB-систем связи осуществлялась в рамках рабочей группы IEEE 802.15: стандарт IEEE 802.15.4a-2007 определил импульсный UWB (IR-UWB) в качестве физического уровня для персональных сетей [6], а поправка IEEE 802.15.4z (2020) существенно расширила возможности дальнометрических измерений и безопасности [7]. Однако реальные условия эксплуатации характеризуются воздействием сложной совокупности дестабилизирующих факторов (многолучевого распространения, теплового шума, непреднамеренных и преднамеренных помех), которые могут существенно снизить надёжность приёма [8, 9].

Адекватное математическое описание радиоканала является необходимым условием для корректной оценки помехоустойчивости и скрытности UWB-системы. Стандартная модель Салеха–Валенсуэлы (S-V), принятая в IEEE 802.15.4a [10], задаёт статистику времён прихода и амплитуд многолучевых компонент, однако не описывает динамику замираний во времени.

В свою очередь, большинство известных работ либо ограничиваются численным моделированием, либо используют упрощённые аналитические модели без строгого учёта временной эволюции амплитуд [11, 12].

В настоящей работе предлагается комплекс математических моделей UWB-радиоканала, основанный на применении аппарата стохастических дифференциальных уравнений и уравнения Фоккера–Планка для описания временной эволюции амплитуд многолучевых компонент. Такой подход обеспечивает единое описание как мгновенных статистических распределений, так и динамики замираний, что критически важно для анализа скрытности передачи и устойчивости к преднамеренным помехам. Помимо модели канала формализуются количественные показатели скрытности (LPD), позволяющие оценить уязвимость системы к обнаружению сторонним наблюдателем.

ИМПУЛЬСНАЯ И ЧАСТОТНО-ВРЕМЕННАЯ МОДЕЛЬ UWB-КАНАЛА

В самом общем виде линейный нестационарный радиоканал описывается импульсной характеристикой $h(t, \tau)$, зависящей от текущего времени наблюдения t и задержки распространения τ . Связь между входным сигналом $s(t)$ и выходным процессом $r(t)$ задаётся операцией свёртки с добавлением аддитивного шума $w(t)$:

$$r(t) = \int h(t, \tau) s(t - \tau) d\tau + w(t). \quad (1)$$

С учётом выраженной многолучевости UWB-канала внутри помещений импульсная характеристика представляется в виде суммы конечного числа взвешенных и задержанных дельта-функций:

$$h(t, \tau) = \sum_{k=0}^K a_k(t) \exp(j\varphi_k(t)) \delta(\tau - \tau_k), \quad (2)$$

где K – число существенных многолучевых компонент; $a_k(t)$ и $\varphi_k(t)$ – амплитуда и фаза k -й компоненты; τ_k – соответствующая ей задержка распространения. В рамках допущения квазистационарности на интервале анализа задержки τ_k считаются постоянными, тогда как амплитуды и фазы могут медленно изменяться во времени вследствие замираний и возможного движения объектов в зоне распространения [10].

Подстановка многолучевого представления (2) в общее уравнение свёртки (1) даёт выражение для выходного сигнала:

$$r(t) = \sum_{k=0}^K a_k(t) \exp(j\varphi_k(t)) s(t - \tau_k) + w(t).$$

Характерной особенностью UWB-канала является чрезвычайно большое число разрешимых многолучевых компонент – до нескольких сотен в промышленных средах, что обусловлено высоким временным разрешением сверхкоротких импульсов [11].

Частотно-временная модель канала вводится как преобразование Фурье по переменной задержки τ . Для фиксированного момента времени t комплексная частотная характеристика канала определяется соотношением:

$$H(f, t) = \int h(t, \tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau.$$

С учётом многолучевого представления импульсной характеристики (2) получаем явную форму:

$$H(f, t) = \sum_{k=0}^K a_k(t) \exp(j\varphi_k(t)) \exp(-j2\pi f\tau_k).$$

Таким образом, в частотной области UWB-канал реализует суперпозицию набора комплексных экспонент, каждая из которых соответствует отдельному многолучевому пути с

собственной задержкой и случайной комплексной амплитудой. В предположении медленной изменчивости амплитуд и фаз по сравнению с длительностью символа частотная характеристика $H(f, t)$ может рассматриваться как квазистационарная.

Важным инструментом описания временной структуры многолучевого канала является профиль задержек мощности (Power Delay Profile, PDP), определяемый как математическое ожидание квадрата модуля импульсной характеристики:

$$P(\tau) = E\{|h(t, \tau)|^2\}. \quad (3)$$

По PDP вводятся сводные временные характеристики канала: средняя задержка распространения и среднеквадратическая (RMS) задержка, характеризующая степень растяжения импульса во времени:

$$\bar{\tau} = \frac{\int \tau P(\tau) d\tau}{\int P(\tau) d\tau},$$

$$\sigma_{\tau} = \sqrt{\frac{\int (\tau - \bar{\tau})^2 P(\tau) d\tau}{\int P(\tau) d\tau}}.$$

Для внутренних UWB-каналов, по данным IEEE 802.15.4a, значения RMS-задержки существенно меньше длительности символа, однако соизмеримы или превосходят длительность одиночного импульса, что приводит к выраженной межсимвольной интерференции при высоких скоростях передачи [6, 10].

СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ МНОГОЛУЧЕВОГО КАНАЛА

Вне зоны видимости – в NLOS-режиме (Non-Line-of-Sight) – отсутствует доминирующая компонента, и результирующая амплитуда формируется интерференцией большого числа рассеянных путей с независимыми фазами. В этом случае огибающая комплексной амплитуды приближённо подчиняется распределению Релея:

$$p_{Ray}(a) = \frac{a}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right), \quad a \geq 0 \quad (4)$$

где σ^2 характеризует дисперсию реальной и мнимой частей комплексной амплитуды.

В LOS-сценарии (зона видимости, Line-of-Sight) в приёмном сигнале присутствует доминирующая компонента, соответствующая прямому лучу. Огибающая описывается распределением Райса:

$$p_{Rice}(a) = \frac{a}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{a^2 + s^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{as}{\sigma^2}\right), \quad a \geq 0$$

где s – амплитуда детерминированной составляющей; $I_0(x)$ – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка. Отношение $K = s^2/(2\sigma^2)$ интерпретируется как K -фактор канала и характеризует относительный вклад доминирующего луча [10, 13].

Для компактной характеристики степени распределения энергии по многолучевым путям вводится показатель эффективного числа компонент:

$$K_{eff} = \frac{(\sum_k E\{|a_k|^2\})^2}{\sum_k E\{|a_k|^4\}}.$$

Если K реальных путей имеют неравные мощности, то $K_{eff} < K$; в пределе равных мощностей $K_{eff} = K$. Данный показатель используется при оценке влияния многолучевости на скрытность передачи, поскольку распределение энергии по большему числу путей снижает пиковую мощность сигнала в точке наблюдения [12].

Для обоснованного выбора параметрического семейства распределений амплитуд используется информационно-теоретический критерий – дивергенция Кульбака–Лейблера (KLD):

$$D_{KL}(p_{emp}||p_{tar}) = \int p_{emp}(a) \ln \frac{p_{emp}(a)}{p_{tar}(a)} da.$$

Минимизация D_{KL} позволяет выбрать из класса распределений Ртлея, Райса и Накагами то, которое наиболее точно аппроксимирует измеренные гистограммы амплитуд для данного сценария распространения [14].

ВРЕМЕННАЯ ВАРИАЦИЯ КАНАЛА И ДОПЛЕРОВСКИЕ ЭФФЕКТЫ

В условиях относительного перемещения передатчика, приёмника или объектов среды каждая k -я многолучевая компонента испытывает доплеровский сдвиг частоты:

$$f_{D,k} = \frac{v_k}{c} f_c,$$

где v_k – проекция относительной скорости движения на направление k -го луча; c – скорость света. Для типовых внутрипомещённых UWB-систем стандарта IEEE 802.15.4a при несущей частоте $f_c = 3,5$ ГГц и скорости движения $v_k = 2$ м/с максимальная доплеровская частота составляет примерно 23,3 Гц.

Доплеровское уширение B_D характеризует суммарный разброс доплеровских частот и оценивается как:

$$B_D = 2f_{D,max}.$$

Время когерентности задаёт характерный масштаб временной стабильности канала:

$$T_c \approx \frac{1}{5B_D}.$$

Для рассмотренного примера получаем $B_D \approx 46,6$ Гц и $T_c \approx 4,3 \cdot 10^{-3}$ с. Это означает, что на протяжении нескольких миллисекунд канал может считаться приблизительно стационарным, что существенно превышает длительность одного UWB-символа [6, 10].

Важным параметром, определяющим класс канала, является произведение доплеровского уширения на разброс задержек. UWB-каналы относятся к классу каналов с малым уширением (underspread):

$$B_D \cdot \sigma_\tau \ll 1.$$

Это означает, что селективность канала по частоте и по времени может анализироваться раздельно, а на интервалах, существенно превышающих длительность символа, допустимо использование квазистационарных моделей. Данное свойство существенно упрощает математический аппарат при сохранении физической адекватности модели [10, 15].

ФОККЕР–ПЛАНКОВСКАЯ МОДЕЛЬ ЭВОЛЮЦИИ АМПЛИТУД

Стационарного распределения амплитуд для описания канала недостаточно: при анализе скрытности передачи существенную роль играет динамика замираний. Для описания этой динамики предлагается подход на основе стохастического дифференциального уравнения:

$$\frac{da(t)}{dt} = A(a(t)) + \sqrt{2D} \xi(t), \quad (5)$$

где $A(a)$ – детерминированная составляющая (дрейф), описывающая тенденцию амплитуды к возврату к среднему значению; $D > 0$ – коэффициент диффузии, характеризующий интенсивность случайных флуктуаций; $\xi(t)$ – нормированный белый гауссовский шум.

Соответствующее стохастическому дифференциальному уравнению (5) уравнение Фоккера–Планка для плотности вероятности $p(a, t)$ имеет вид:

$$\frac{\partial p(a, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial a} [A(a) p(a, t)] + D \frac{\partial^2 p(a, t)}{\partial a^2}. \quad (6)$$

В уравнении (6) первое слагаемое в правой части представляет дрейфовый член, а второе – диффузионный член, характеризующий размытие распределения вероятности вследствие

случайных воздействий среды.

Стационарное решение $p_{st}(a)$ удовлетворяет соотношению при нулевом потоке вероятности:

$$p_{st}(a) = C \exp\left(\int \frac{2A(a)}{D} da\right),$$

где C – нормировочная константа. Ключевое преимущество данного подхода: выбирая конкретный вид функции дрейфа $A(a)$, можно получить стационарные распределения, совпадающие с распределениями Релея или Райса, а динамические характеристики процесса будут определяться параметрами D и $A(a)$.

Для NLOS-сценария (распределение Релея) выбираются параметры дрейфа и диффузии в форме: $A(a) = D_0(1/a - a/\sigma^2)$, $D = D_0$. Стохастическое дифференциальное уравнение в этом случае принимает вид:

$$\frac{da(t)}{dt} = D_0\left(\frac{1}{a(t)} - \frac{a(t)}{\sigma^2}\right) + \sqrt{2D_0} \xi(t).$$

Стационарное решение соответствующего уравнения Фоккера–Планка воспроизводит распределение Релея (3). Физический смысл дрейфового члена $1/a$ – отталкивание от нуля (амплитуда не может быть отрицательной), а $-a/\sigma^2$ – возврат к характерному масштабу σ .

Для LOS-сценария (распределение Райса) дрейфовая функция модифицируется с учётом детерминированной составляющей s . Временная корреляционная функция определяется параметрами $A(a)$ и D , и путём их подбора можно обеспечить согласование с экспериментально наблюдаемым временем когерентности замираний [13, 15].

В полной модели многолучевого канала каждая из K компонент описывается собственным стохастическим дифференциальным уравнением (4) с индивидуальными параметрами дрейфа $A_k(a)$ и диффузии D_k , подбираемыми из условия согласования с профилем задержек мощности (3) и измеренной динамикой замираний. Численная реализация модели осуществляется методом Эйлера–Маруямы, что позволяет генерировать ансамбли реализаций канала для статистического анализа характеристик приёма.

Существенным достоинством Фоккер–Планковского подхода является возможность аналитического получения моментов распределения (среднего, дисперсии, корреляционной функции), что позволяет проводить оценки показателей качества приёма (отношение сигнал/шум-и-помеха (SINR) и коэффициент ошибок (BER)) без ресурсоёмкого статистического моделирования методом Монте-Карло. Кроме того, подход допускает естественное расширение на случай преднамеренных помех путём модификации диффузионного коэффициента [16].

МОДЕЛЬ ПОМЕХОВОЙ ОБСТАНОВКИ И ПОКАЗАТЕЛИ СКРЫТНОСТИ (LPD)

Обобщённая модель помеховой обстановки описывает совокупность воздействий через эквивалентную спектральную плотность мощности:

$$N_{\Sigma}(f) = N_0 + S_{bg}(f) + S_{jam}(f),$$

где N_0 – спектральная плотность теплового шума; $S_{bg}(f)$ – спектральная плотность фоновой помехи; $S_{jam}(f)$ – спектральная плотность преднамеренной помехи. Отношение сигнал/шум-и-помеха:

$$SINR = \frac{P_s}{N_0 W + P_{bg} + P_{jam}}.$$

Сторонний наблюдатель – приёмное устройство, задачей которого является обнаружение факта передачи UWB-сигнала. Задача формулируется как проверка статистической гипотезы:

$$H_0: r(t) = n_{\Sigma}(t); \quad H_1: r(t) = s(t) + n_{\Sigma}(t).$$

Наиболее универсальным алгоритмом обнаружения является энергетический детектор с

решающей статистикой:

$$T = \int_0^{T_{obs}} |r(t)|^2 dt.$$

При гипотезе H_0 и гауссовском шуме статистика T подчиняется центральному χ^2 -распределению, при гипотезе H_1 – нецентральному χ^2 -распределению с параметром нецентральности, пропорциональным энергии сигнала [17].

Для количественной оценки скрытности UWB-системы вводится индекс скрытности:

$$\eta_{LPD} = \frac{E_{req}}{E_{det}},$$

где E_{req} – минимальная энергия сигнала, обеспечивающая требуемую вероятность ошибки; E_{det} – энергия, при которой вероятность обнаружения наблюдателем достигает порогового значения P_d^* . Значение $\eta_{LPD} < 1$ означает наличие запаса по скрытности.

Альтернативной мерой является запас по LPD в децибелах:

$$M_{LPD} = 10 \lg \left(\frac{E_{det}}{E_{req}} \right) = -10 \lg(\eta_{LPD}).$$

Положительное значение M_{LPD} соответствует наличию запаса по скрытности. Как видно из рис. 1, дублет (вторая производная гауссовского импульса) имеет наивысшую скрытность, в то время как гауссовский импульс является обнаруживаемым.

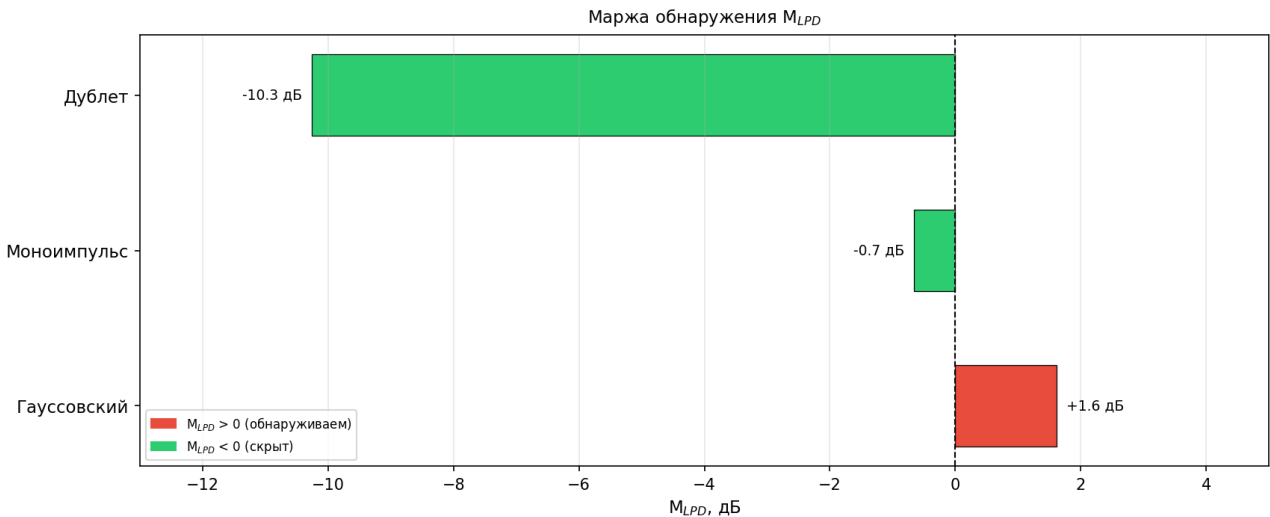


Рис. 1. Сравнение скрытности UWB-сигналов (дублета, моноимпульса и гауссовского импульса)

Скрытность UWB-системы определяется совокупностью факторов: шириной полосы сигнала W (при фиксированной мощности увеличение W снижает спектральную плотность); коэффициентом обработки G_p ; многолучевым распространением, распределяющим энергию по множеству путей; расстоянием до наблюдателя; уровнем фоновых помех, маскирующих полезный сигнал [3, 8, 17].

Условие скрытности формализуется как требование:

$$SINR_{int} < SINR_{det},$$

где $SINR_{int}$ – отношение сигнал/шум-и-помеха в точке наблюдателя, а $SINR_{det}$ – пороговое значение обнаружения. Сверхширокополосные сигналы обладают естественным запасом по LPD благодаря низкой спектральной плотности мощности: при распределении энергии в полосе 3,1–10,6 ГГц спектральная плотность оказывается ниже шумового пола типовых узкополосных приёмников [3, 8].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе разработан комплекс математических моделей UWB-радиоканала, обеспечивающий анализ надёжности функционирования и скрытности передачи.

1. Построена импульсная модель многолучевого UWB-канала в виде линейного фильтра с переменными параметрами. Получены частотно-временные представления, профиль задержек мощности и сводные временные характеристики канала.

2. Введено статистическое описание амплитуд многолучевых компонент на основе распределений Рэлея и Райса. Обоснован выбор параметрических распределений по критерию минимума дивергенции Кульбака–Лейблера.

3. Предложена Фоккер–Планковская модель эволюции амплитуд многолучевых компонент. Показано, что стационарное решение уравнения Фоккера–Планка воспроизводит заданные распределения (Рэлея, Райса), а динамические характеристики согласуются с наблюдаемым временем когерентности замираний.

4. Исследованы доплеровские эффекты. Показано, что UWB-каналы относятся к классу каналов с малым уширением, что обосновывает применимость квазистационарных моделей.

5. Формализованы количественные показатели скрытности: индекс η_{LPD} и запас M_{LPD} , связывающие энергетические характеристики системы с вероятностью обнаружения сторонним наблюдателем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Federal Communications Commission. Revision of Part 15 of the Commission's Rules Regarding Ultra-Wideband Transmission Systems: First Report and Order: ET Docket 98-153, FCC 02-48. Washington, DC, 2002.
2. Астанин, Л. Ю., Костылев, А. А. Основы сверхширокополосных радиолокационных измерений. – М.: Радио и связь, 1989. – 190 с.
3. Win, M. Z., Scholtz, R. A. Impulse radio: how it works // IEEE Commun. Lett. – 1998. – Vol. 2. – No. 2. – P. 36–38.
4. Introduction to Ultra-Wideband Radar Systems / ed. J. D. Taylor. – CRC Press, 2020.
5. Шепета, А. П., Махлин, А. М., Львовский, С. А. Особенности применения сверхширокополосных сигналов в современных РЛС // Радиотехника и связь. – 2016. – № 3. – С. 18–23.
6. IEEE Standard 802.15.4a-2007. IEEE Standard for Information Technology – Low-Rate Wireless Personal Area Networks: Amendment 1: Add Alternate PHYs.
7. IEEE Standard 802.15.4z-2020. Enhanced Ultra Wideband (UWB) Physical Layers (PHYs) and Associated Ranging Techniques.
8. Tiemann, J., Friedrich, J., Wietfeld, C. Experimental Evaluation of IEEE 802.15.4z UWB Ranging Performance under Interference // Sensors. – 2022. – Vol. 22. – No. 4. – P. 1643.
9. IEEE P802.15.4ab/D02, March 2025. IEEE Draft Standard for Low-Rate Wireless Network Amendment 1.
10. Molisch, A. F. et al. IEEE 802.15.4a channel model – final report. Technical Report IEEE P802.15-04/0662r1-SG4a, 2004.
11. NXP Semiconductors. Ultra-Wideband (UWB) for the IoT: White Paper. Eindhoven, 2020.
12. Zafari, F., Gkelias, A., Leung, K. K. A Survey of Indoor Localization Systems and Technologies // IEEE Commun. Surv. Tutorials. – 2019. – Vol. 21. – No. 3. – P. 2568–2599.
13. Xianjia, Y. et al. Applications of UWB Networks and Positioning to Autonomous Robots and Industrial Systems // 2021 10th Mediterranean Conf. on Embedded Computing. Budva, Montenegro: IEEE. – 2021. – P. 1–6.
14. Powell, C. et al. IEEE 802.15.4 IR-UWB: A Technology Precisely Positioned for Adoption // IEEE Open J. Veh. Technol. – 2026. – Vol. 7. – P. 237–248.
15. Hu, X., Jin, T. Short-Range Vital Signs Sensing Based on EEMD and CWT Using IR-UWB Radar // Sensors. – 2016. – Vol. 16. – No. 12. – P. 2025.
16. Global Market Insights. Ultra-Wideband Market Size - By Positioning System, By Application, Forecast 2024–2032. Selbyville, DE, 2024.
17. Schmidt, J. F. et al. Experimental Study of UWB Connectivity in Industrial Environments // VDE. – 2018. – P. 1–4.

ОБ АВТОРАХ

АЛЕКСАКИНА Яна Витальевна, ассистент кафедры телекоммуникационных систем (ТС), ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий», +79270823311, aleksakinayv@uust.ru.

METADATA

Title: Stochastic Model of a UWB Radio Channel Based on the Fokker–Planck Equation.

Author: Aleksakina Y. V.¹

Affiliation:

¹ Ufa University of Science and Technology (UUST), Russia.

Email: ¹ aleksakinayv@uust.ru

Language: Russian.

Source: Molodezhnyj Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa University of Science and Technology), no. 2 (36), pp. 30-37, 2026.

ISSN 2225-9309 (Print).

Abstract: A set of mathematical models of an ultra-wideband (UWB) radio channel has been developed, aimed at analyzing the operational reliability and transmission covertness under multipath propagation and intentional interference conditions. The impulse response of the multipath channel is represented as a linear filter with time-varying parameters; time–frequency representations have been derived that enable the assessment of channel selectivity. A statistical description of multipath component amplitudes based on the Rayleigh and Rice distributions has been introduced. A Fokker–Planck model of the temporal evolution of amplitudes is proposed, providing a unified description of both instantaneous statistics and fading dynamics. Quantitative covertness metrics have been formalized that relate the energy characteristics of the system to the probability of detection by an unintended observer.

Keywords: UWB radio channel, multipath propagation, Fokker–Planck equation, Rayleigh distribution, Rice distribution, Doppler effects, transmission covertness

About authors:

ALEKSAKINA Yana V., Ufa University of Science and Technology, 32 Zaki Validi St., Ufa, 450076, Russia, aleksakinayv@uust.ru, ORCID ID: 0000-0002-0337-7714, Scopus Author ID: 58045426300.